

گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۳/۹/۸

وقت : ۹۰ دقیقه



دانشکده علوم ریاضی

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

امتحان میان ترم درس ریاضی ۱- فنی

(رشته‌های مهندسی برق، پزشکی، صنایع، عمران، کامپیوتر، مکانیک)

نیمسال (اول / دوم) سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳

توجه : از نوشتن با مداد خودداری ننمائید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- معادلات زیر را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید. ۲۵ نمره

$$z^6 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i} \quad (\text{الف})$$
$$z^2 + 2iz + 3 = 0 \quad (\text{ب})$$

سوال ۲- تابع $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$ را در نظر بگیرید. ۱۵ نمره
(الف) یک به یک بودن تابع را بررسی کنید. (ب) معکوس تابع را در صورت وجود بیابید.

سوال ۳- حدود زیر را بدست آورید : ۲۰ نمره
(الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[4]{x+2} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2} - 1}$
(ب) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x^2}$

سوال ۴- مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع زیر در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد. ۱۰ نمره
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x \geq 1 \\ \sqrt{x^2 + 3} & x < 1 \end{cases}$$

سوال ۵- مشتق تابع زیر را بدست آورید. ۱۰ نمره
$$f(x) = \frac{\tan 2x}{x^2 + 1}$$

موفق باشید



پاسخ سوال ۱: الف)

$$z^6 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i} = \frac{2e^{\frac{2\pi}{3}i}}{2e^{-\frac{\pi}{6}i}} = e^{\frac{5\pi}{6}i} \rightarrow z_k = e^{\frac{k\pi}{3}i} \times e^{\frac{5\pi}{6}i}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\rightarrow z_0 = e^{\frac{5\pi}{6}i}, z_1 = e^{\frac{17\pi}{6}i}, z_2 = e^{\frac{29\pi}{6}i}, z_3 = e^{\frac{41\pi}{6}i}, z_4 = e^{\frac{53\pi}{6}i}, z_5 = e^{\frac{65\pi}{6}i}$$

$$z = -i \pm \sqrt{-1-3} = -i \pm 2i \rightarrow z_1 = i, z_2 = -3i \quad \text{ب)}$$

پاسخ سوال ۲: الف) برای اثبات یک به یک بودن تابع فرض می‌کنیم $f(a) = f(b)$ و باید نتیجه بگیریم $a = b$.

$$f(a) = f(b) \rightarrow \frac{3\sqrt[3]{a}-2}{2\sqrt[3]{a}-1} = \frac{3\sqrt[3]{b}-2}{2\sqrt[3]{b}-1}$$

$$\rightarrow 6\sqrt[3]{ab} - 3\sqrt[3]{a} - 4\sqrt[3]{b} + 2 = 6\sqrt[3]{ab} - 3\sqrt[3]{b} - 4\sqrt[3]{a} + 2 \rightarrow \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b} \rightarrow a = b$$

ب) برای پیدا کردن وارون تابع جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$x = \frac{3\sqrt[3]{y}-2}{2\sqrt[3]{y}-1} \rightarrow \frac{2x}{3} = \frac{6\sqrt[3]{y}-4}{6\sqrt[3]{y}-3} \rightarrow \frac{2x}{3-2x} = \frac{6\sqrt[3]{y}-4}{1} \rightarrow \frac{x}{3-2x} + 2 = 3\sqrt[3]{y}$$

$$\rightarrow \frac{6-3x}{2-3x} = 3\sqrt[3]{y} \rightarrow y = \left(\frac{x-2}{2x-3}\right)^3$$

پاسخ سوال ۳: الف)

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2} - 1} \xrightarrow{x+2=t^6} \ell_1 = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{t^6} - \sqrt{t^6}}{\sqrt{t^6} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - t^2}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t}{t+1} = \frac{-1}{2}$$

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{\sqrt[3]{x+2}-1}{\sqrt{x+2}-1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}+1} - 1 \right) = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2}$$

$$\ell_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x^2=\frac{1}{t}} \ell_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sin t = 1 \quad \text{ب)}$$

پاسخ سوال ۴: در نقطه $x=1$ باید سه مقدار حد چپ، حد راست و مقدار تابع یعنی

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x^2+3} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2+bx+1) = a+b+1, \quad f(1) = a+b+1$$

برابر باشند. پس $a+b+1=2 \rightarrow a+b=1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax+b & x \geq 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} & x < 1 \end{cases}, \quad f'(1^+) = f'(1^-) \quad \text{یعنی باید مشتق چپ و راست تابع با هم برابر باشند.}$$

پس $\frac{1}{2}a + b = 1$ و چون $a+b=1$ پس داریم $\frac{1}{2}a + 1 = 1 \rightarrow a = 0$ که نتیجه می‌دهد $a = \frac{-1}{2}$ و $b = \frac{3}{2}$.

پاسخ سوال ۵:

$$f'(x) = \frac{2(1+\tan^2 2x)(x^2+1) - 2x \tan 2x}{(x^2+1)^2}$$